УДК 517.968

К РЕШЕНИЮ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПОРЯДКАМИ НУЛЕЙ

Т.М. Урбанович

Полоцкий государственный университет
ул. Блохина, 29, Новополоцк, 211440, Белоруссия, e-mail: UrbanovichTM@gmail.com

Аннотация. Исследуется сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши с произвольными особенностями нецелого порядка у коэффициентов. Получены условия разрешимости и явная формула представления решения.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, ядро Коши, задача линейного сопряжения.

Рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение на прямой

$$a\varphi + bS\varphi = f \tag{1}$$

с оператором Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \mathbb{R},$$

где коэффициенты a, b и правая часть f принадлежат классу Гельдера $H(\mathbb{R}, \infty)$ на расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$, причем $f(\infty) = 0$.

Напомним, что функция $\varphi(t) \in H(\mathbb{R}, \infty)$ принадлежит классу Гёльдера на расширенной прямой с показателем $0 < \mu < 1$ (условию Липшица при $\mu = 1$), если существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq C d^{\mu}(t_1, t_2),$$

где

$$d(t_1, t_2) = \frac{|t_1 - t_2|}{(1+|t_1|)(1+|t_2|)}, \quad t_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2,$$

$$d(t_1, \infty) = d(\infty, t_1) = \frac{1}{(1+|t_1|)}, \quad t_1 \in \mathbb{R}.$$

Условие $\varphi(\infty) = 0$ выделяет в пространстве $H(\mathbb{R}, \infty)$ подпространство, которое обозначаем $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R}, \infty)$.

Очевидно, функции $\varphi(t) \in \overset{\circ}{H}(\mathbb{R}, \infty)$ этого класса ведут себя как $O(|z|^{-\varepsilon})$ при $|z| \to \infty$ с некоторым $\varepsilon > 0$ (зависящим от φ). В частности, для $\varphi(t) \in \overset{\circ}{H}(\mathbb{R}, \infty)$ вне окрестности точки t_0 функция $(t - t_0)^{-1}\varphi(t)$ интегрируема, поэтому сингулярный интеграл Коши

$(S\varphi)(t_0)$ понимается в смысле главного значения только по отношению к точке t_0. Хорошо известно [1, 2], что оператор S инвариантен в классе $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R},\infty)$.

Уравнение (1) является уравнением нормального типа, если коэффициенты $a \pm b$ обратимы в классе $H(\mathbb{R},\infty)$, т.е. они отличны от нуля всюду на $\overline{\mathbb{R}}$. Исчерпывающее исследование уравнения этого типа было впервые проведено Ф.Д. Гаховым и изложено в его монографии [1]. Оно основывается на сведении уравнения (1) к эквивалентной задаче линейного сопряжения и эффективного решения последней. Характер разрешимости этого уравнения определяется целым числом æ – индексом Коши

$$æ = \frac{1}{2\pi i} \ln G(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty}, \quad G = \frac{a-b}{a+b}\,. \tag{2}$$

Именно, при $æ \geqslant 0$ уравнение всегда разрешимо в классе $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R};\infty)$, причем однородное уравнение имеет æ линейно независимых решений. При $æ < 0$ однородное уравнение имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть f удовлетворяет $-æ$ условиям ортогональности.

Исходя из конечного множества $E \subset \mathbb{R}$, обозначим $\overset{*}{H}(\mathbb{R},E;\infty)$ класс функций φ, которые принадлежат $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R}\setminus U,\infty)$ вне любой окрестности U множества E, а в окрестности каждой точки $\tau \in E$ представимы в виде $\varphi_0(t)(t-\tau)^{-1}$, где $\varphi_0 \in H$ и $\varphi_0(\tau) = 0$. Тогда любое решение $\varphi \in \overset{*}{H}(\mathbb{R},E;\infty)$ уравнения (1) с правой частью $f \in \overset{\circ}{H}(\mathbb{R},\infty)$ также принадлежит классу $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R},\infty)$.

Пусть заданы конечные множества E и F, которые не пересекаются. Метод Ф.Д. Гахова будет воспроизведен ниже в исключительном случае, когда функции $a \pm b$ допускают нули в конечном числе точек действительной прямой:

$$\begin{aligned} (a+b)(t) &= O(|t-\tau|^{\alpha_\tau}) \text{ при } t \to \tau \in E\,, \\ (a-b)(t) &= O(|t-\tau|^{\alpha_\tau}) \text{ при } t \to \tau \in F\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где конечные множества E и F не пересекаются.

В случае целых положительных α_τ уравнение (1) на гладком замкнутом контуре интегрирования Г было впервые рассмотрено Ф.Д. Гаховым [3] и Л.А. Чикиным [4]. Независимо от этих работ и другим методом Д.И. Шерман [5, 6] получил аналогичные результаты в предположении, что только одна из функций $(a \pm b)(t)$ имеет нули целых порядков на контуре Г.

В данной работе рассматривается ситуация, когда функции $a \pm b$ допускают на прямой нули произвольных неотрицательных порядков α_τ. Случай $0 < \alpha_\tau < 1$ рассмотрен в работе [7].

Условия (3) уточним следующим образом. Положим

$$A(t) = \prod_{\tau \in E} \left(\frac{t-\tau}{t+i}\right)^{\alpha_\tau}, \quad B(t) = \prod_{\tau \in F} \left(\frac{t-\tau}{t+i}\right)^{\alpha_\tau}, \tag{4}$$

где ветви соответствующих степенных множителей выбраны с разрезом вдоль отрезков $[\tau,-i]$. В частности, $A(t)$ и $B(t)$ продолжаются до функций, аналитических в полуплоскости $D_+=\{z,\ \mathrm{Im} z>0\}$, для этих продолжений ниже используем те же обозначения. В принятых обозначениях требуется, чтобы функции c,d в представлении

$$a+b=cA\,,\quad a-b=dB\,, \tag{5}$$

принадлежали классу $H(\mathbb{R},\infty)$ и были обратимы в этом классе.

Заметим, что функции

$$\widetilde{A}(t)=\frac{A(t)}{|A(t)|}\,,\quad \widetilde{B}(t)=\frac{B(t)}{|B(t)|}$$

кусочно непрерывны на прямой с возможными разрывами в точках множеств E и F. Их односторонние пределы в этих точках $\tau\in E$ и $\tau\in F$ связаны, соответственно, соотношениями

$$\widetilde{A}(\tau-0)=e^{\pi\alpha_\tau}\widetilde{A}(\tau+0),\ \tau\in E,\quad \widetilde{B}(\tau-0)=e^{\pi\alpha_\tau}\widetilde{B}(\tau+0),\ \tau\in F\,. \tag{6}$$

Поэтому (5) можем представить в виде

$$(a+b)(t)=\tilde{c}(t)\prod_{\tau\in E}\left|\frac{t-\tau}{t+i}\right|^{\alpha_\tau},\quad (a-b)(t)=\tilde{d}(t)\prod_{\tau\in F}\left|\frac{t-\tau}{t+i}\right|^{\alpha_\tau},$$

где обратимые коэффициенты $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$ кусочно непрерывны с характером разрыва (6) в точках E и F соответственно.

В обозначениях (2) введем каноническую функцию $X(z)$, отвечающую коэффициенту G. По определению [1, 2] это кусочно аналитическая функция, которая в полуплоскости $D_\pm=\{\pm\mathrm{Im} z>0\}$ представима в виде

$$X(z)=X^0_+(z),\ z\in D_+;\quad X(z)=X^0_-(z)\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\text{æ}},\ z\in D_-; \tag{7}$$

где аналитическая в $D_\pm$ функция $X_\pm$ принадлежит и обратима в классе $H(\overline{D}_\pm,\infty)$ (классы $H(\overline{D}_\pm,\infty)$ в полуплоскостях определяются совершенно аналогично случаю прямой). Кроме того, предельные значения $X^\pm$ функции X на прямой $\mathbb{R}$ связаны соотношением

$$X^+=GX^-\,. \tag{8}$$

Следуя [1, 2], каноническую функцию X можно построить в явном виде. С этой целью, исходя из непрерывных ветвей логарифма, рассмотрим функцию

$$g(t)=\ln G(t)-\text{æ}\ln\left(\frac{t-i}{t+i}\right),$$

которая, очевидно, принадлежит классу $H(\mathbb{R},\infty)$. Отвечающий ей интеграл типа Коши

$$h(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{g(t)-g(\infty)}{t-z}dt\,,\quad z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R},$$

принадлежит классу $\overset{\circ}{H}(\overline{D}_{\pm};\infty)$ в каждой из полуплоскостей $D^{\pm}=\{\pm\mathrm{Im}z>0\}$ и его граничные значения связаны формулой Сохоцкого-Племеля $h^{+}(t)-h^{-}(t)=g(t)-g(\infty)$. Поэтому условия (7), (8) выполнены по отношению к $X^0_+(z)=\exp[h(z)+g(\infty)],\ z\in D_+$, и $X^0_-(z)=\exp[h(z)],\ z\in D_-$.

Пусть $[x]$ и $\{x\}$ означают, соответственно, целую и дробную части вещественного числа x. Введем неотрицательные целые числа

$$m=\sum\nolimits_{\tau\in E}[\alpha_\tau]\,,\quad n=\sum\nolimits_{\tau\in F}[\alpha_\tau]\,, \tag{9}$$

и запишем

$$A=A^0A^1\,,\quad B=B^0B^1\,, \tag{10}$$

где рациональные функции A^0, B^0 определяются аналогично (4) по целым частям $[\alpha_\tau]$ и аналогичный смысл имеют A^1, B^1 по отношению к дробным частям показателей.

Решение уравнения (1) с правой частью $f\in\overset{\circ}{H}(\mathbb{R};\infty)$ будем отыскивать в классе

$$\left\{\varphi\,\Big|\,\frac{\varphi}{B^1}\in\overset{*}{H}(\mathbb{R},E\cup F;\infty)\right\}. \tag{11}$$

Пусть φ есть решение уравнения (1) из этого класса и

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}\,,\quad z\in D_+\cup D_-\,. \tag{12}$$

Хорошо известно [1, 2], что тогда функция $\phi(z)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\phi(z)}{B^1(z)}\in\overset{*}{H}(\overline{D}_+,E\cup F;\infty)\,,\quad \phi(z)\in\overset{*}{H}(\overline{D}_-,E\cup F;\infty)\,, \tag{13}$$

где классы $\overset{*}{H}(\overline{D}_{\pm},E\cup F;\infty)$ в полуплоскостях определяются совершенно аналогично случаю прямой.

По формулам Сохоцкого-Племеля

$$\varphi=\phi^+-\phi^-,\quad S\varphi=\phi^++\phi^-\,, \tag{14}$$

поэтому, с учетом (2), (8), (9), уравнение (1) можем переписать в форме краевого условия

$$A\frac{\phi^+}{X^+}-B^0B^1\frac{\phi^-}{X^-}=\frac{f}{cX^+}\,,$$

для функции ϕ. После деления на B^1 отсюда следует

$$\left(\frac{A\phi}{B^1X}\right)^+-B^0\left(\frac{\phi}{X}\right)^-=g,\quad g=\frac{f}{cX^+B^1}\,.$$

Введем кусочно аналитическую функцию ψ по формулам

$$\psi(z)=\frac{A(z)\phi(z)}{B^1(z)X(z)},\ z\in D^+;\quad \psi(z)=B^0(z)\frac{\phi(z)}{X(z)},\ z\in D^-\,, \tag{15}$$

где, напомним,

$$B^0(z)=\prod_{\tau\in F}\left(\frac{z-\tau}{z+i}\right)^{[\alpha_\tau]}.$$

Тогда предыдущее краевое условие можем представить в форме

$$\psi^+-\psi^-=g\,. \tag{16}$$

Из (7), (9) и (15) выводим, что в окрестности точки $z=-i$ функция ψ имеет поведение

$$\psi(z)=O(1)(z+i)^{-(\text{æ}+n)_0}\quad \text{при}\quad z\to -i\,, \tag{17}$$

где, для целого k, под $(k)_0$ здесь и ниже понимается неотрицательное число $(k+|k|)/2$. В частности, при $\text{æ}+n<0$ функция ψ аналитична в окрестности точки $z=-i$ и ее производные до порядка $-\text{æ}-n-1$ включительно обращаются в этой точке в нуль. Удобно этот факт записывать единообразно в форме

$$\psi^{(k)}(-i)=0,\ 0\leqslant k\leqslant(-\text{æ}-n)_0-1\,, \tag{18}$$

где здесь и ниже условия этого типа по пустому множеству индексов k опускаются.

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\psi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{g(t)dt}{t-z}\,,\quad g=\frac{f}{cX^+B^1}\,.$$

Очевидно, функция ψ_0 принадлежит классу (13) и удовлетворяет краевому условию (16). Поэтому разность $\psi-\psi_0$ аналитична вне конечного множества $E\cup F\cup\{-i\}$, исчезает на бесконечности, допускает слабые особенности в точках $\tau\in E\cup F$ и возможный полюс в точке $-i$. С учетом (17) отсюда следует

$$\psi(z)=\psi_0(z)+p(z)(z+i)^{-(\text{æ}+n)_0}$$

с некоторым многочленом p степени $\deg p<(\text{æ}+n)_0$ (в случае $(\text{æ}+n)_0=0$ этот многочлен считается равным нулю). Кроме того, при $\text{æ}+n<0$ функция ψ должна быть подчинена условиям (18). При выполнении этих условий функция ϕ, которая восстанавливается по ψ из равенств (15), аналитична вне вещественной оси. В соответствии с (14) и (2), (8) отсюда приходим к следующему заключению.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты a,b уравнения (1) представлены в виде (4), (5), где c,d обратимы в классе $H(\mathbb{R};\infty)$. Пусть $f\in\overset{\circ}{H}(\mathbb{R};\infty)$ и*

$$g=\frac{f}{cX^+B^1},\quad q(t)=(t+i)^{(\text{æ}+n)_0}. \tag{19}$$

Тогда любое решение φ уравнения (1) в классе (11) представимо в виде

$$\varphi=\frac{X^+B^1}{A}\left(\frac{g+Sg}{2}+\frac{p}{q}\right)+\frac{cX^+}{dB^0}\left(\frac{g-Sg}{2}-\frac{p}{q}\right)\,, \tag{20}$$

с некоторым многочленом p степени меньше $(æ + n)_0$, причем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)dt}{(t+i)^{k+1}} + \left(\frac{p}{q}\right)^{(k)}(-i) = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant (-æ - n)_0 - 1\,. \tag{21}$$

Обратно, если эти условия выполнены и формула (20) определяет функцию из класса (11), то эта функция является решением уравнения (1).

Возникает задача описания условий на правую часть f уравнения (1) и многочлен p, обеспечивающих принадлежность функции (20) классу (11). Начнем со следующего вспомогательного предложения.

Лемма 1. *Пусть заданы попарно различные точки $z_1, \dots, z_l$, $\tau_1, \dots, \tau_s$ комплексной плоскости и неотрицательные целые числа $m_1, \dots, m_l$, $n_1, \dots, n_s$. Положим $M = m_1 + \dots + m_l$, $N = n_1 + \dots + n_s$ и $q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_l)^{m_l}$. Тогда при $M \geqslant N$ система линейных уравнений*

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{(k)}(\tau_j) = \xi_j^k\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant n_j - 1,\ j = 1, \dots, s\,, \tag{22}$$

всегда разрешима в классе P многочленов степени меньше M, а при $M \leqslant N$ соответствующая однородная система имеет только нулевое решение. В частности, при $N > M$ существует такое подпространство $X \subseteq \mathbb{C}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{n_s}$ размерности $N - M$, что условия

$$\sum\nolimits_{k,j} \xi_j^k \eta_j^k = 0,\ \eta \in X\,,$$

необходимы и достаточны для разрешимости неоднородной системы (22).

□ Предположим сначала, что $M = N$ и пусть многочлен $p \in P$ удовлетворяет однородной системе (22). Тогда функция p/q имеет в точках τ_j нуль порядка n_j. Поскольку, по условию, эти точки отличны от точек z_k, отсюда следует, что аналогичным свойством обладает и многочлен p. Но тогда либо его степень должна быть не меньше M, что невозможно, либо $p = 0$. Таким образом, однородная система (22) имеет только нулевое решение и следовательно, неоднородная система однозначно разрешима. Очевидно, последнее свойство справедливо и при $N \geqslant M$.

Остается рассмотреть случай $M > N$. В этом случае систему (22) можем рассматривать в подпространстве P многочленов степени меньше N, размерность которого равна N. Поэтому эта система, а вместе с ней и исходная система всегда разрешимы. ■

Рассмотрим сначала случай $f = 0$ однородного уравнения (1).

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 размерность пространства решений однородного уравнения (1) в классе (11) равна $(æ - m)_0$. Более точно, при $æ \leqslant n$ однородное уравнение в этом классе имеет только нулевое решение, а при $æ > n$ в обозначениях (19) его решениями служат функции*

$$\varphi = X^+\left(\frac{B^1}{A} - \frac{c}{dB^0}\right)\frac{p}{q}$$

с многочленами p степени меньше $(æ+n)_0$, подчиненными условиям

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{(k)}(\tau)=0,\ 0\leqslant k\leqslant[\alpha_\tau]-1,\ \tau\in E\cup F\cup\{-i\}\,, \tag{23}$$

где для единообразия положено $[\alpha_{-i}]=(-æ-n)_0$.

□ Первую часть условий (23) составляют условия (21) при $f=0$, а вторая часть этих условий обеспечивает принадлежность функции φ классу (11). Пусть P есть класс многочленов степени меньше $M=(æ+n)_0$ и $N=m+n+(-æ-n)_0$ есть суммарное число условий (23), которые выделяют подпространство $P_0\subseteq P$. Из леммы 1, где следует положить $l=1,\ z_1=-i$, при $æ+n>0$ вытекает, что размерность $\dim P_0=(M-N)_0$, т.е. $P_0=0$ при $N>M$ и $\dim P_0=M-N$ в противном случае. Остается заметить, что

$$M-N=(æ+n)_0-m-n-(-æ-n)_0=æ-m\,. \quad ■$$

Вопросу о принадлежности классу (11) функций (20) предпошлем рассмотрение граничных свойств интеграла типа Коши с дифференцируемой плотностью. Пусть $0<r_0<r_1$ и D есть полукруг $\{|z|<r_0,\ \mathrm{Im}z>0\}$. Рассмотрим в этом полукруге интеграл

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-r_1}^{r_1}\frac{\varphi(t)dt}{t^\delta(t-z)}\,, \tag{24}$$

где $0\leqslant\delta<1$, и степенная функция фиксируется ее непрерывной ветвью в одном из полукругов $\{|z|<r_0,\ \pm\mathrm{Im}z>0\}$. Хорошо известно (и этот факт неоднократно использовался выше), что при $\varphi\in H[-r_1,r_1]$ функция $z^\delta\phi(z)$ принадлежит классу $H(\overline{D})$.

Лемма 2. *Пусть $\varphi\in H^n[-r_1,r_1]$, $n\geqslant1$, т.е $n-$ая производная $\varphi^{(n)}\in H[-r_1,r_1]$. Тогда при $\delta=0$ функция (24) принадлежит классу $H^n(\overline{D})$, а при $0<\delta<1$ она представима в виде*

$$\phi(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^{k-\delta}}{k!}\varphi^{(k)}(0)+\phi_0(z)\,, \tag{25}$$

где $\phi_0\in H^{n-1}(\overline{D})$ и $z^\delta\phi_0^{(n)}(z)\in H(\overline{D})$.

□ Пусть сначала $\delta=0$. Дифференцируя функцию (24) и интегрируя результат по частям, получим:

$$\phi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-r_1}^{r_1}\frac{\varphi'(t)dt}{t-z}-\frac{\varphi(r_1)}{r_1-z}-\frac{\varphi(-r_1)}{r_1+z}\right),\quad z\in D\,.$$

Повторяя эту процедуру, приходим к равенству

$$\phi^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-r_1}^{r_1}\frac{\varphi^{(n)}(t)dt}{t-z}+\psi(z) \tag{26}$$

с некоторой функцией ψ из класса $H(\overline{D})$. Следовательно, и сама производная $\phi^{(n)}$ принадлежит этому классу.

Пусть теперь $0 < \delta < 1$. Предположим сначала, что $\varphi(t)$ совпадает с многочленом

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \varphi^{(k)}(0)\,.$$

Пусть D_1 тот из полукругов $\{|z| < r_1,\ \pm \mathrm{Im} z > 0\}$, в котором зафиксирована ветвь степенной функции z^δ. Очевидно, либо $D \subseteq D_1$, либо D и D_1 лежат в разных полуплоскостях. В первом случае, по формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_L \pm \int_{-r_1}^{r_1}\right) \frac{p(t)dt}{t^\delta (t-z)} = \frac{p(z)}{z^\delta}, \quad z \in D\,,$$

где знак определяется выбором полукруга D_1 и L есть криволинейная часть его границы. Во втором случае, рассматриваемый интеграл равен нулю в D. Поэтому в обоих случаях утверждение леммы очевидно.

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что $\varphi^{(k)}(0) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. В этом случае можем записать

$$\varphi(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \varphi^{(n)}(s) ds\,,$$

так что при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ будем иметь

$$\varphi^{(k)}(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-k-1} \varphi^{(n)}(s)}{(n-k-1)!} ds = \frac{t^{n-k}}{(n-k-1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{n-k-1} \varphi^{(n)}(t\tau) d\tau\,.$$

Таким образом,

$$t^{k-n} \varphi^{(k)}(t) \in H[-r_1, r_1]\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1\,.$$

Следовательно, по формуле Лейбница

$$[t^{-\delta}\varphi(t)]^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{1-\delta+k-n} \varphi^{(k)}(t) \in H[-r_1, r_1]$$

с соответствующими коэффициентами $c_k \in \mathbb{R}$ и аналогично

$$[t^{-\delta}\varphi(t)]^{(n)} = t^{-\delta}\varphi^{(n)}(t) + \varphi_0(t), \quad \varphi_0 \in H[-r_1, r_1]\,.$$

Записывая теперь для производных функции (24) порядков $k = n-1$ и $k = n$ аналогичные (26) равенства, отсюда приходим к принадлежности функций $\phi^{(n-1)}(z)$ и $z^\delta \phi^{(n)}(z)$ классу $H(\overline{D})$, что завершает доказательство леммы. ■

С помощью леммы 2 легко описать условия, при которых функция ϕ имеет нуль максимально возможного порядка.

Лемма 3. *В условиях леммы 2 функция $\phi(z)$ имеет нуль порядка $n - \delta$ тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} \phi^{(k)}(0) = 0\,,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\,, \quad \textit{при} \quad \delta = 0\,, \\ \phi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(0) = 0\,,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\,, \quad \textit{при} \quad \delta > 0\,, \end{gathered} \tag{27}$$

и в этом случае функция $z^{\delta-n}\phi(z) \in H(\overline{D})$.

□ При $\delta = 0$ утверждение леммы очевидно. То, что функция $z^{-n}\phi(z)$ принадлежит классу H, вытекает из равенства

$$\phi(z) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^z (z-t)^{n-1}\phi^{(n)}(t)dt = \frac{z^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\phi^{(n)}(z\tau)d\tau\,, \qquad (28)$$

где учтено свойство выпуклости полукруга D.

Пусть $0 < \delta < 1$. Если одно из значений $\varphi^{(k)}(0)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, отлично от нуля, то в силу представления (25) функция ϕ не может иметь нуль порядка $n-1$ в точке $z = 0$. Поэтому условия (27) необходимы. Если они выполнены, то можем написать равенство (28). Согласно лемме 2 в этом случае $\phi_*(z) = z^\delta\phi^{(n)}(z) \in H(\overline{D})$, так что и функция

$$z^{\delta-n}\phi(z) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 \frac{(1-\tau)^{n-1}}{\tau^\delta}\phi_*(z\tau)d\tau$$

принадлежит классу H. ■

Обратимся к неоднородному уравнению (1).

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы 1, коэффициенты* c, d *и функция* f *принадлежат классу* $H^{[\alpha_\tau]}$ *в окрестности точек* $\tau \in E \cup F$. *Положим для краткости* $(F)^0 = \{\tau \in F,\ \{\alpha_\tau\} > 0\}$. *Тогда условия*

$$f^{(k)}(\tau) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant [\alpha_\tau] - 1\,, \quad \tau \in (F)^0\,, \qquad (29)$$

необходимы для разрешимости уравнения (1) в классе (11). Пусть эти условия выполнены. Тогда при $æ - m \geqslant 0$ *уравнение (1) всегда разрешимо, а при* $æ - m < 0$ *для его разрешимости необходимо выполнение* $m - æ$ *линейно независимых условий на правую часть* f. *Более точно, существует такое подпространство*

$$X \subseteq \mathbb{C}^{(-æ-n)_0} \times \prod\nolimits_{\tau\in E\cup F} \mathbb{C}^{[\alpha_\tau]}$$

размерности $m - æ$, *что в обозначениях (19) условия ортогональности*

$$\frac{\eta^k}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)dt}{(t+i)^{k+1}} + \sum_{\tau\in E}\sum_{k=0}^{[\alpha_\tau]-1} \eta_\tau^k (g+Sg)^{(k)}(\tau) + \sum_{\tau\in E}\sum_{k=0}^{[\alpha_\tau]-1} \eta_\tau^k (g-Sg)^{(k)}(\tau) = 0 \qquad (30)$$

ко всем векторам $\eta = (\eta^k, \eta_\tau^k) \in X$ *необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (1) в классе (11).*

□ По предположению, коэффициенты c, d принадлежат классу $H^{[\alpha_\tau]}$ в окрестности точек $\tau \in E \cup F$. Из леммы 1 и построения канонической функции X видно, что аналогичным свойством обладает и функция X^+. Таким образом, в окрестности точек $\tau \in (E)^0$ функция g в (19) представима в виде

$$g(t) = (t-\tau)^{-\delta_\tau}\tilde{g}(t)\,, \quad \delta_\tau = \{\alpha_\tau\}\,,$$

где $\tilde{g} \in H^{[\alpha_\tau]}$, и ветвь степенной функции фиксируется с верхней или нижней полуплоскости, а в окрестности остальных точек принадлежит $H^{[\alpha_\tau]}$. Поэтому, на основании лемм 2 и 3, заключаем, что условия (29) необходимы для того чтобы функции в круглых скобках в (20) имели нуль порядка $[\alpha_\tau]$ в точках $\tau \in (F)^0$ и принадлежали классу $H^{[\alpha_\tau]-1}$ в окрестности всех точек $E \cup F$, (конечно, при $[\alpha_\tau] = 0$ под указанным классом следует понимать H). Совместно с (21) и условиями

$$\begin{aligned} &\left(\frac{g+Sg}{2} + \frac{p}{q}\right)^{(k)}(\tau) = 0\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant [\alpha_\tau] - 1\,,\ \tau \in E\,, \\ &\left(\frac{g-Sg}{2} - \frac{p}{q}\right)^{(k)}(\tau) = 0\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant [\alpha_\tau] - 1\,,\ \tau \in F\,, \end{aligned} \qquad (31)$$

они необходимы и достаточны для принадлежности функции (20) классу (11). По отношению к многочленам p условия (21) и (31) можно рассматривать как неоднородную систему линейных уравнений леммы 1, правая часть

$$\xi \in \mathbb{C}^{(-\text{æ}-n)_0} \times \prod\nolimits_{\tau \in E \cup F} \mathbb{C}^{[\alpha_\tau]}$$

которой зависит от f. Соответствующая ей однородная система описывается (23). Таким образом, как и при доказательстве теоремы 1, следует воспользоваться этой леммой, где нужно положить $M = (\text{æ} + n)_0$ и $N = m + n_+(-\text{æ} - n)_0$. Поскольку $M - N = \text{æ} - m$, отсюда следуют все утверждения теоремы. При этом соотношения (30) как раз являются условиями разрешимости системы, о которой идет речь в лемме 1. ■

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. 3-е изд. / М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / М.: Наука, 1968. – 512 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения // Известия Казанского физ-матем. общества. – 1949 – 14;3. – С.75-160.
4. Чикин Л.А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Учёные записки Казанского гос. ун-та им. В.И. Ульянова-Ленина. – 1953. – 113;10. – С.57-105.
5. Шерман Д.И. Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений // Прикладная математика и механика. – 1951. – 15;1. – С.75-82.
6. Шерман Д.И. О приёмах решения некоторых сингулярных интегральных уравнений // Прикладная математика и механика. – 1948. – 12;4. – С.423-452.
7. Солдатов А.П., Урбанович Т.М. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2011 – №.17 (112);24. – С.165-171.

TO SOLUTION OF CHARACTERISTIC SINGULAR INTEGRAL EQUATION ON REAL AXIS IN EXCEPTIONAL CASE WITH ARBITRARY ZERO ORDERS

T.M. Urbanovich

Polotsk State University,
Blohina St., 29, Novopolotsk, 211440, Belarus, e-mail: UrbanovichTM@gmail.com

Abstract. Singular integral equation with Cauchy's kernel having arbitrary singularities of noninteger order is studied. The solvability conditions and the explicit formula of the solution representation are obtained.

Key words: characteristic singular integral equation, Cauchy's kernel, linear conjugation problem.